

CLASA a V-a

Într-un magazin de birștică, un anumit număr de pixuri, din același model, sunt puse în 3 cutii notate prin A, B, C. Se știe că în cutia A se află $\frac{3}{8}$ din numărul total de pixuri, în cutia B se află cu $\frac{1}{6}$ din numărul pixurilor din cutia A mai mult decât în cutia A, iar în cutia C se află restul de pixuri.

Dacă din cutia C se mută $\frac{1}{3}$ din pixurile ei în cutia A, iar din cutia B se mută 10 pixuri în cutia C, atunci cutiile A și C vor avea același număr de pixuri. Aflați numărul total de pixuri din cele 3 cutii.

GMB 2/2026

Soluție: $x = \text{nr. total de pixuri}$

$$a = \frac{3}{8} \cdot x; \quad b = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot x$$

$$b = \frac{6}{16} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot x = \frac{7}{16} \cdot x \quad 2p$$

$$a + b = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{16} \cdot x = \frac{6}{16} \cdot x + \frac{7}{16} \cdot x$$

$$a + b = \frac{13}{16} \cdot x \quad 1p$$

$$c = \frac{3}{16} \cdot x \quad 1p$$

$$a = \frac{6}{16} \cdot x$$

$$b = \frac{7}{16} \cdot x$$

$$c = \frac{3}{16} \cdot x$$

$$\frac{1}{3} \cdot c = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot x = \frac{1}{16} \cdot x \quad 1p$$

În urma mutării pixurilor avem:

$$\frac{6}{16} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot x = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot x + 10 \quad 1p$$

$$\frac{7}{16} \cdot x = \frac{2}{16} \cdot x + 10$$

$$\frac{5}{16} \cdot x = 10 \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 16}{5} \Rightarrow x = 32 \text{ pixuri} \quad 1p$$

Problemă pentru Clasa a V-a

Determinați toate numerele de cinci cifre care, împărțite la 4, au ca rezultat răsturnatul lor.

Neculai Stanciu, Buzău

Soluție. $\overline{abcde} : 4 = \overline{edcba} \Leftrightarrow \overline{abcde} = 4 \cdot \overline{edcba}$.

- $\overline{abcde} < 100000 \Rightarrow \overline{edcba} < 25000 \Rightarrow e \in \{0,1,2\}$, dar $\overline{abcde}$ este par, deci $e \in \{0,2\}$ și cum $\overline{edcba}$ este un număr de 5 cifre, rezultă $e = 2$. 1 punct

- $\overline{abcde} = 4 \cdot \overline{edcba} \Rightarrow a \in \{3,8\}$, dar $\overline{edcba} \geq 20000$, $\overline{abcde} \geq 80000 \Rightarrow a = 8$. 1 punct

- $\overline{abcde} \leq 89992 \Rightarrow \overline{edcba} \leq 22498$, $\overline{edcba} \geq 20008 \Rightarrow d \in \{0,1,2\}$, dar $\overline{abcde} = 4 \cdot \overline{edcba} \Rightarrow d = 1$. 1 punct

- $d = 4b + 3 = 1 \pmod{10} \Rightarrow b \in \{2,7\}$, $21008 \leq \overline{edcba} \leq 21998$
 $\Rightarrow 84032 \leq \overline{abcde} \leq 87992 \Rightarrow b = 7$. 1 punct

- Obținem $c = 9$. 1 punct

Deci există un singur număr cu proprietatea dorită și anume $\overline{abcde} = 87912$.

1 punct

CLASA a V - a

Comparati numerele naturale

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024}$$

$$si \ b = (3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \dots \cdot 3^{89}) : 243^{135}$$

Solutie.

profesor Neagu Mihai

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2024} = 2^{2025} - 1$$

1p

$$\begin{aligned} 3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \dots \cdot 3^{89} &= 3^{1+3+5+\dots+89} \\ &= 3^{(1+89) \cdot 45 : 2} = 3^{45 \cdot 45} = 3^{2025} \end{aligned}$$

2p

$$243^{135} = (3^5)^{135} = 3^{5 \cdot 135} = 3^{675}$$

1p

$$b = 3^{2025} : 3^{675} = 3^{1350} = (3^2)^{675} = 9^{675}$$

1p

$$a = 2^{2025} - 1 = (2^3)^{675} - 1 = 8^{675} - 1$$

1p

$$a < 8^{675} < 9^{675} = b$$

1p

CLASA a VIa

$$1) \quad (a,b) + [a,b] = 437, \quad a,b \in \mathbb{N}, \quad a < b$$

Rezolvare:

$$(a,b) \mid [a,b] \Rightarrow (a,b) \mid 437 = 19 \cdot 23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b) \in \{1, 19, 23\} \text{ ----- } 2p$$

$$1) \quad (a,b) = 1, \quad [a,b] = 436 \Rightarrow [a,b] = 2^2 \cdot 109$$

$$(a,b) \in \{(1, 436); (2^2, 109)\} \text{ ----- } 1p$$

$$2) \quad (a,b) = 19, \quad [a,b] = 418 \Rightarrow [a,b] = 2 \cdot 19 \cdot 11 \text{ ----- } 1p$$

$$\Rightarrow (a,b) \in \{(19, 2 \cdot 11 \cdot 19); (2 \cdot 19, 11 \cdot 19)\}$$

$$(a,b) \in \{(19, \del{418}); (38, 209)\} \text{ ----- } 1p$$

$$3) \quad (a,b) = 23, \quad [a,b] = 2 \cdot 3^2 \cdot 23 \text{ ----- } 1p$$

$$(a,b) \in \{(23, 2 \cdot 3^2 \cdot 23); (2 \cdot 23, 3^2 \cdot 23)\}$$

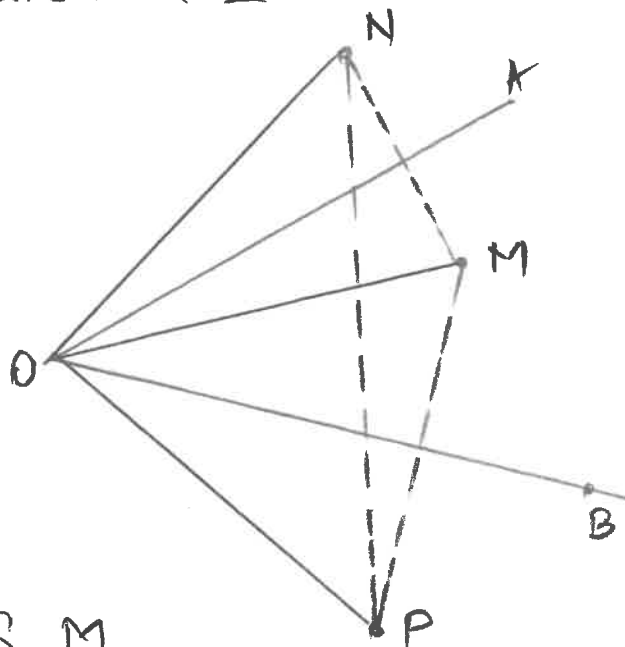
$$(a,b) \in \{(23, 414); (46, 207)\} \text{ ----- } 1p.$$

CLASA a Via

2)

$$N = S_{OA} M$$

$$P = S_{OB} M$$



a)

Din $N = S_{OA} M$

avem OA - mediatorea seg. $[MN] \Rightarrow$

$$[OM] \equiv [ON] \quad (1) \quad \text{-----} \quad 1p$$

Din $P = S_{OB} M$ avem OB mediatorea seg $[MP] \Rightarrow$

$$\Rightarrow [OM] \equiv [OP] \quad (2) \quad \text{-----} \quad 1p$$

$$\text{Din } (1), (2) \Rightarrow [ON] \equiv [OP] \quad \text{-----} \quad 1p$$

b) In ΔNMP avem OA, OB mediatorele lat.

$[MN]$ si $[MP] \Rightarrow O$ este centrul cercului circ. Δ
 triunghiului MNP ----- 2p

Mediatorea lui $[NP]$ trece tot prin O ----- 2p

Punctul (a) se poate rezolva si' prin congruență
 de triunghiuri.

RAPOARTE CLASA VI

DAN DUMITRESCU

1. Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât

$$\frac{a^5 + a^3}{b^2} = \frac{b^5 + b^3}{c^2} = \frac{c^5 + c^3}{a^2}.$$

Demonstrați că numărul

$$abc(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

este cub perfect..

Soluție :

Notăm valoarea comună a celor trei fracții cu K . Atunci $K > 0$ și

$$b^2 = \frac{a^5 + a^3}{K}, \quad c^2 = \frac{b^5 + b^3}{K}, \quad a^2 = \frac{c^5 + c^3}{K}. \quad 1 \text{ punct}$$

Dacă $a < b$, atunci

$$a^5 + a^3 < b^5 + b^3,$$

deci

$$b^2 < c^2,$$

adică $b < c$. La fel, din $b < c$ rezultă $c < a$. Astfel am avea

$$a < b < c < a,$$

imposibil.

Dacă $a > b$, analog obținem

$$a > b > c > a,$$

imposibil.

Prin urmare, $a = b$. Din același raționament rezultă și $b = c$, deci

$$a = b = c.$$

Notăm $a = b = c = n$. Atunci

$$abc(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = n^3(n^2 + 1)^3 = (n(n^2 + 1))^3.$$

Deci numărul dat este cub perfect.

1 punct

1 punct

1 punct

1 punct

1 punct

1 punct

1 punct

BAREM

PROBLEMA 1

ENUNȚ:

Determinați numărul natural n pentru care diferența
 $\sqrt{n+2024} - \sqrt{n-2024}$ este un pătrat perfect

GM HR-5/2024.E: 16903

MONICA BOLOGA, Beie Mare

SOLUȚIE:

Cum numerele $n+2024$ și $n-2024$ cu oarecare punctaj se deduce că $E(n) = \sqrt{n+2024} - \sqrt{n-2024}$ este pătrat perfect al unui număr par. 2 puncte

deci $\sqrt{n+2024} - \sqrt{n-2024} = (2k)^2$ 1 punct

Atunci $n+2024 = n-2024 + 16k^2 + 8k^2\sqrt{n-2024}$ 1 punct

echivalent cu $506 = k^2(2k^2 + \sqrt{n-2024})$ 1 punct

Cum $506 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, se deduce $k=1$, deci $506 = 2 + \sqrt{n-2024}$ 1 punct

adică $n = 504^2 + 2024 \Rightarrow n = 256040$, iar $E(n) = 2^2$ 1 punct

BAKEM

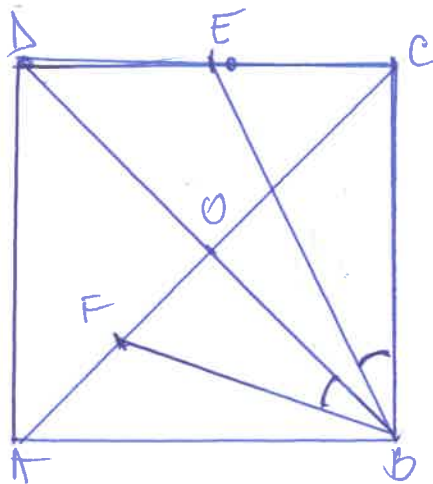
PROBLEMA 2

ENUNȚ:

Fie patrulaterul $ABCD$. Punctul E este mijlocul lui CD iar punctul F este pe AC astfel încât $3AF = FC$. Aflați măsura unghiului EBF .

GM. HK-11/2025, E17359, GHE-CRĂCIUN, PLOIESTI

SOLUȚIE:



Fie $AC \cap BD = \{O\}$
 Din $AF = 3FC \Rightarrow AF = \frac{1}{4}AC \Rightarrow AF = FO = \frac{OC}{2} = \frac{OB}{2}$ 1 punct

Dacă notăm cu $a = AB$, atunci $BC = a$, $EC = \frac{a}{2}$, $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ 2 puncte

Atunci $\frac{OF}{FC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\frac{OB}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Cum $\angle FOB = \angle ECB = 90^\circ$ obținem $\triangle FOB \sim \triangle ECB$ (LUL) 2 puncte.

și deci $\angle FBO \equiv \angle ECB$ 1 punct

$m(\angle FOE) = m(\angle FOB) + m(\angle BOE) = m(\angle DBE) + m(\angle ECB) =$
 $= m(\angle DCB) = 45^\circ$ 1 punct

BALEM

PROBLEMA 3

ENUNȚ: Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+40+3\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}+3}} = 5$

GM. MK 10/2025, E: 17329,
GEORGE-FLORENT SERBAN,
BRAILA

SOLUȚIE:

În condițiile de existență $x > 1$,

$$\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+4}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x-1}} \geq 2\sqrt{x-1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x-1}} \geq 4 \quad 2 \text{ puncte}$$

$$\begin{aligned} x+40+3\sqrt{x+4} &= (x+4)+9+3\sqrt{x+4}+27 \geq 2\sqrt{(x+4) \cdot 9} + 3\sqrt{x+4}+27 = \\ &= 6\sqrt{x+4} + 3\sqrt{x+4}+27 = 9(\sqrt{x+4}+3) \quad 3 \text{ puncte.} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{x+40+3\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}+3}} \geq \sqrt{\frac{9(\sqrt{x+4}+3)}{\sqrt{x+4}+3}} = 3 \quad 1 \text{ punct}$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+40+3\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}+3}} \geq 2+3=5$$

Deoarece uneori ecuația devine $\sqrt{x-1} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ și $\sqrt{x+4}=3$,
atunci $x=5$ 1 punct.

obs. Pentru observarea faptului că $x=5$ e soluție se
scrie 1 punct.

Problema 1, clasa a VIII-a

Determinați toate tripletetele (a, b, c) , de numere reale, care satisfac simultan ecuațiile:
 $ab+c = bc+a = ca+b = 6.$

Soluție

Din $ab+c = bc+a$ avem: $bc+a-ab-c=0 \Leftrightarrow$
 $b(c-a)-(c-a)=0 \Leftrightarrow (b-1)(c-a)=0 \dots$ 1 punct
Dacă $b=1$ obținem $a+c=6$ și $ac=5$ adică
 $a(6-a)=5 \Leftrightarrow a^2-a-5a+5=0 \Leftrightarrow a(a-1)-5(a-1)=0 \Leftrightarrow$
 $(a-1)(a-5)=0 \Leftrightarrow a=1$ sau $a=5$ 1 punct
Se obțin soluțiile $(a, b, c) = (1, 1, 5)$ și $(a, b, c) = (5, 1, 1)$ 1 punct.

Dacă $a=c$ din $ab+c = ca+b$ avem $ab-ac-b+c=0 \Leftrightarrow$
 $a(b-c)-(b-c)=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-c)=0 \dots$ 1 punct
Dacă $a=1=c$ rezultă $b=5$ și obținem soluții
 $(a, b, c) = (1, 5, 1)$ 1 punct
Dacă $b=c$ atunci $a=b=c$, o ecuație din enunț
devine $a^2+a=6 \Leftrightarrow a^2-2a+3a-6=0 \Leftrightarrow a(a-2)+3(a-2)=0$
 $\Leftrightarrow (a-2)(a+3)=0 \Leftrightarrow a=2$ sau $a=-3$ 1 punct

În final toate tripletetele care satisfac ecuațiile din enunț sunt: $(1, 1, 5); (5, 1, 1); (1, 5, 1); (2, 2, 2)$
și $(-3, -3, -3)$ 1 punct

Problema 2, clasa a VIII-9
Se consideră numărul natural $n, n \geq 2018$. Determinați
pătratele perfecte de forma $N = 2^{2018} + 2^{2022} + 2^{2023} +$
 $+ 2^{2024} + 2^{2026} + 2^n$.
Neculai Stanciu, Buzău

Neculai Stanciu, Buzău

Solutio

$$N = 2^{2018} (1 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^{n-2018}) = 2^{2018} (369 + 2^{n-2018})$$

$N = 2^{2018} (1 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8) = 2^{2018} \cdot 369$
 Pentru ca N să fie pătrat perfect trebuie ca $369 + 2^{n-2018}$ să fie
 pătrat perfect. Pentru $n = 2018$, $N = 370$ și nu este pătrat
 perfect. 1 punct
 Dacă $n > 2018$, atunci $n - 2018$ este de una din
 1 punct

perfect. Pentru $n = 2018$, $N = 510$ este perfect. 1 punct
 Dacă $n - 2018$ este impar atunci $N - 2018$ este de 1 punct
 perfect.

Dacă $n=2018$
 formulele $6K+1, 6K+3, 6K+5$
 pentru $n=2018=6K+1$ avem: $2^{n-2018} = 2^{6K+1} = 2 \cdot 64^K =$
 $2 \cdot 64^K = 128 \cdot 64^{K-1}$

$$= 2(63+1)^K = 2(M9+1) = M9+2 \dots \dots \dots \frac{1 \text{ period}}{}$$

$= 2(63+1)^k = 2(M9+1) = 115 + 2 = 117$
 Analog pentru $n-2018 = 6k+3$ sau $n-2018 = 6k+5$
 2^{n-2018} este de forma $M9+8$ sau $M9+5 \dots$ 1 punct
 $M9+2, M9+5, M9+8$ nu sunt pătrate perfecte 1 punct

Rezultata $m-2018=2m, m \in \mathbb{H}^*$ si atunci

Resultat $m-2018 = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$
 $369 + 2^{2m} = a^2 \Leftrightarrow a^2 - (2^m)^2 = 369 \Leftrightarrow (a-2^m)(a+2^m) = 1 \cdot 369 =$
 $= 3 \cdot 123 = 9 \cdot 41 \dots\dots\dots \underline{\text{1punkt}}$

$$\left. \begin{aligned} a - 2^m &= 1 \\ a + 2^m &= 369 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2^m = 2^{m+1} = 368, m \text{ are solutions}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+2^m = 3650 \\ a-2^m = 3 \\ a+2^m = 123 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2^m = 2^{m+1} = 120 \text{ are solutions}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+2^m = 9 \\ a+2^m = 41 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2^m = 32 \Rightarrow 2^m = 16 \Rightarrow m = 4, a = 25$$

$$a + 2^m = 415$$
$$n - 2018 = 8 \Rightarrow n = 2026, N = 2^{2018} \cdot (369 + 2^8) =$$
$$= 2^{2018} (369 + 256) = 2^{2018} \cdot 625 = (2^{1009} \cdot 25)^2 \quad \underline{\text{1 point}}$$



Problema 3. Fie $ABCD$ un tetraedru. Arătați că înălțimile din A și din B ale tetraedrului sunt concurente dacă și numai dacă $AB \perp CD$.

Olimpiadă Vietnam, 1962

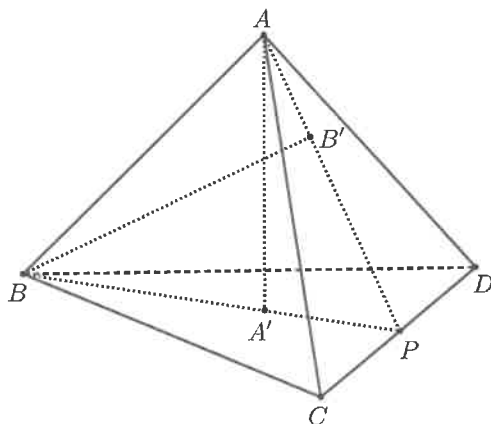
Soluție:

$\Rightarrow$ Fie $AA' \perp (BCD)$, $A' \in (BCD)$ și $BB' \perp (ACD)$, $B' \in (ACD)$. Presupunem că înălțimile AA' și BB' se intersectează. Atunci ele determină un plan α . Din $AA' \perp (BCD)$ și $CD \subset (BCD)$ rezultă $AA' \perp CD$. Analog rezultă că $BB' \perp CD$. Rezultă că $CD \perp \alpha$ și, cum $AB \subset \alpha$, obținem că $CD \perp AB$.

$\Leftarrow$ Să presupunem că $AB \perp CD$. Fie $AA' \perp (BCD)$, $A' \in (BCD)$.

Dacă $A' = B$, atunci înălțimile din A și B se intersectează în punctul B .

Dacă $A' \neq B$, atunci din $AA' \perp CD$ rezultă $CD \perp (BAA')$. Fie $\{P\} = BA' \cap CD$ și $BB' \perp AP$, $B' \in AP$. Atunci $BB' \perp AP$ și $BB' \perp CD$, deci $BB' \perp (ACD)$, adică BB' este înălțime în tetraedru și, evident intersectează AA' în ortocentrul triunghiului ABP .



SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XX-a
10 mai 2025

Clasa a IX-a

Problema 1

Rezolvați ecuația:

$$\left[\frac{x+3}{2} \right] + \left[\frac{x+4}{2} \right] = \frac{x+7}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Soluție

CLASA a IX-a

1) Ecuația dată se scrie

$$\left[\frac{x+3}{2} \right] + \left[\frac{x+3}{2} + \frac{1}{2} \right] = \left[2 \cdot \frac{x+3}{2} \right] = [x+3]$$

$$\text{Deci } [x+3] = \frac{x+7}{2} \text{ --- 3 p}$$

$$\text{Cum } \frac{x+7}{2} \in \mathbb{Z}, \frac{x+7}{2} = k \Rightarrow x = 2k-7 \text{ --- 1 p}$$

$$\text{Ecuația devine } [2k-4] = k, k \in \mathbb{Z} \text{ --- 1 p}$$

$$k \leq 2k-4 < k+1 \Rightarrow k=4 \Rightarrow S=\{1\} \text{ --- 2 p}$$

Problema 2

Determinați o relație independentă de x , între a și b în cazurile:

a) $\sin x + \cos x = a$ și $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = b$.

b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a$ și $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = b$

Supliment Gazeta matematică

Soluție

2. a) $\text{Din } \sin x + \cos x = a \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{a^2 - 1}{2} \quad \text{---} \quad 2p$

$\text{Din } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = b \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = b \quad \text{---} \quad 1p$

$\text{Din cele 2 relații avem } b \cdot (a^2 - 1) = 2 \quad \text{---} \quad 1p$

b) $\text{Din } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = a \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = a^2 \quad \text{---} \quad 2p$

$\text{Deci } b + 2 = a^2 \quad \text{---} \quad 1p$

Problema 3

Fie $x, y \in (0, \infty)$ și numerele: $A = x + \frac{1}{x}$, $B = y + \frac{1}{y}$, $C = x^2 + y^2$,

$D = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$. Arătați că:

a) $(A + \sqrt{A^2 - 4})^2 + (B + \sqrt{B^2 - 4})^2 = 4C, \forall x, y \geq 1$

$(A + \sqrt{A^2 - 4})^2 + (B + \sqrt{B^2 - 4})^2 = 4D, \forall x, y \in (0, 1)$.

b) $(A^2 + B^2)^2 \geq 4(C + 2)(D + 2)$.

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Soluție

3. $\sqrt{A^2 - 4} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = x - \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$

Analogs $\sqrt{B^2 - 4} = y - \frac{1}{y}, \forall y \geq 1$ ----- 1p

$(A + \sqrt{A^2 - 4})^2 = 4x^2; (B + \sqrt{B^2 - 4})^2 = 4y^2$ ----- 1p

$\sqrt{A^2 - 4} = \frac{1}{x} - x, \forall x \in (0, 1)$

$\sqrt{B^2 - 4} = \frac{1}{y} - y, \forall y \in (0, 1)$ ----- 1p

$(A + \sqrt{A^2 - 4})^2 = \frac{4}{x^2}; (B + \sqrt{B^2 - 4})^2 = \frac{4}{y^2}$ ----- 1p

b) $(A^2 + B^2)^2 \geq 4(C + 2)(D + 2)$ se scrie

$A^2 + B^2 \geq 2\sqrt{(C + 2)(D + 2)}$ ----- 1p

$A^2 + B^2 = \left(x^2 + y^2 + 2\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 2\right) \geq$

$\geq 2\sqrt{\left(x^2 + y^2 + 2\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 2\right)} = 2\sqrt{(C + 2)(D + 2)}$ ----- 2p

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XX-a

9 mai 2026

Clasa a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\log_{2026}(x - 2027) = \log_{2027}(x - 2026)$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Soluție si barem

Notăm $\log_{2026}(x - 2027) = \log_{2027}(x - 2026) = t \in \mathbb{R}$ 1 punct

$x - 2027 = 2026^t, x - 2026 = 2027^t$ 1 punct

$2026^t + 1 = 2027^t$ 1 punct

Observăm $t = 1$ este soluție.....1 punct

$2026^t + 1 = 2027^t \Leftrightarrow \left(\frac{2026}{2027}\right)^t + \left(\frac{1}{2027}\right)^t = 1$1 punct

Membrul stâng este o funcție strict descrescătoare, valoarea 1 este luată o singură dată
deci

$t = 1$ este soluție unică.....1 punct

$x = 2026 + 2027 = 4053$ unica soluție a ecuației din enunț.....1 punct

E: 29270: GMB 12/2025, clasa a X-a

Fie $z \in \mathbb{C}$ pentru care $z^3 = 1$. Arătați că $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| \geq 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Călin Emanuel Tudorachi, Bistrița.

Soluție

Dacă $n = 3K$, $K \in \mathbb{N}$ atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = |(z^3)^K + 1| + |(z^3)^K \cdot z + 1| = |1 + 1| + |z + 1| = 2 + |z + 1| \geq 2$ 1 punct

Dacă $n = 3K + 2$, $K \in \mathbb{N}$ atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = |(z^3)^K \cdot z^2 + 1| + |(z^3)^{K+1} + 2| = |z^2 + 1| + 3 \geq 2$ 1 punct

Rămâne de demonstrat inegalitatea din enunț pentru

$n = 3K + 1$.

$z^3 = 1 \Rightarrow z \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$; $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 punct

Dacă $z = 1$ atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = |1 + 1| + |1 + 2| = 5 \geq 2$.

Dacă $z = \varepsilon$ atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = |\varepsilon^{3K+1} + 1| + |\varepsilon^{3K+1} + 2| =$

$$= |(\varepsilon^3)^K \cdot \varepsilon + 1| + |(\varepsilon^3)^K \cdot \varepsilon + 2| = |\varepsilon + 1| + |\varepsilon + 2| = \left| 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| 2 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 1 + \sqrt{\frac{12}{4}} = 1 + \sqrt{3} > 2$$
 2 puncte

Dacă $z = \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = |\varepsilon^{3K+1} + 1| +$

$$+ |\varepsilon^{3K+1} + 2| = |(\varepsilon^3)^K \cdot \varepsilon^2 + 1| + |(\varepsilon^3)^K \cdot \varepsilon^2 + 2| = |\varepsilon^2 + 1| + |\varepsilon^2 + 2| = \left| 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| 2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 1 + \sqrt{3} > 1 + 1 = 2$$
 2 puncte

și inegalitatea din enunț este demonstrată.

Problema 3

La o masă rotundă sunt invitate n perechi, soț și soție. În câte moduri se poate realiza aranjarea invitaților la masă în fiecare dintre următoarele cazuri:

- a) Toți invitații sunt puși la întâmplare, fără niciun criteriu.
- b) Femeile și bărbații sunt puși alternativ.
- c) Fiecare soție stă lângă soțul ei.

Viitorii Olimpici

Soluție

- a) Nu există niciun reper pentru numărare. Se fixează un invitat la masă, pe un loc oarecare și avem $2n - 1$ locuri libere unde vor fi așezați ceilalți $2n - 1$ invitați.1 punct
Această așezare se poate face în $(2n - 1)!$ moduri.....1 punct
- b) Cei n bărbați pot fi așezați în $(n - 1)!$ moduri la masa rotundă (între doi bărbați așezați consecutiv rămâne exact un loc gol). Avem repere și n locuri libere pe care le pot ocupa cele n femei în $n!$ moduri.....1 punct
În total sunt $(n - 1)! \cdot n!$ moduri în care femeile și bărbații pot fi puși alternativ.....1 punct
- c) Considerăm fiecare pereche, soț și soție, ca fiind o entitate care ocupă un bloc de două scaune alăturate. Atunci sunt $(n - 1)!$ moduri de așezare a acestor perechi la masă.....1 punct
Apoi pentru fiecare perche sunt două variante de ordonare la masă, deci în total sunt $(n - 1)! \cdot 2^n$ moduri de așezare la masă în așa fel încât fiecare soție stă lângă soțul ei.

CLASA a XI-a

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculați A^n .

Neaga Mihail

Soluție.

1p $A = 5I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2p $B^3 = O_3 \Rightarrow B^k = O_3 \quad (\forall) k \geq 3$.

$$A^n = (5I_3 + B)^n \quad \underline{\underline{5I_3 \cdot B = B \cdot 5I_3}}$$

$$= C_n^0 (5I_3)^n + C_n^1 (5I_3)^{n-1} \cdot B + C_n^2 (5I_3)^{n-2} B^2 =$$

2p $= 5^n \cdot I_3 + 5^{n-1} \cdot n B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^{n-2} B^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 5^n & 2 \cdot n \cdot 5^{n-1} & -5 \cdot 5^{n-1} \cdot n + 3n(n-1)5^{n-2} \\ 0 & 5^n & 3 \cdot n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

2p $= \begin{pmatrix} 5^n & 2 \cdot n \cdot 5^{n-1} & 5^{n-2} \cdot n (3n-2) \\ 0 & 5^n & 3 \cdot n \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2!]{1 + \sin 2x} + \sqrt[3!]{1 + \sin 3x} + \dots + \sqrt[(n+1)!]{1 + \sin(n+1)x} + x - n}{2x} \right)$$

Soluție:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2!}} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 + \dots + \frac{(1 + \sin(n+1)x)^{\frac{1}{(n+1)!}} - 1}{\sin(n+1)x} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)x} \cdot (n+1) \right) \right)$$

3p

$$2p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2!} \cdot 2 + \frac{1}{3!} \cdot 3 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \cdot (n+1) \right] =$$

$$2p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

Obs: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\mu(x) \rightarrow 0)}} \frac{(1 + \mu(x))^{\lambda} - 1}{\mu(x)} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\mu(x) \rightarrow 0)}} \frac{\sin \mu(x)}{\mu(x)} = 1$$

profesor Constantin Ruse

CLASA a $\overline{XI}$ -a

O funcție continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea
 $f(x) = f(3x+2) \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$. Știind că $f(-2025) = 2026$,
calculați $f(2026)$.

profesor doctor Marin Marin

Soluție.

$$3x+2=t \Rightarrow x = \frac{t-2}{3}.$$

1p Obținem $f\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{3}\right) = f(t) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{t}{3^2} - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3}\right) = \\ &= f\left(\frac{t}{3^3} - \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3}\right) = \dots \\ &= f\left(\frac{t}{3^n} - 2\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3}\right)\right) = \\ &= f\left(\frac{t}{3^n} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

2p $f(t) = f\left(\frac{t}{3^n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) \quad (\forall) t \in \mathbb{R}$

f continuă;

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{3^n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) =$$

2p $= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{3^n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)\right) = f(-1).$

1p Atunci f este constantă pe $\mathbb{R}$: $f(x) = 2026 \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$

1p $f(2026) = f(-2025) = 2026.$

PROBLEMA NR

ENUNȚ:

Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{1+2^{4x-8}} dx$

PROF. OVIDIU TATAM, EM. SĂRĂT

SOLUȚIE:

Utilizând substituția $t = 1+3-x \Rightarrow t = 4-x \Rightarrow x = 4-t$ 1 punct

$$\Rightarrow dx = -dt$$

$$x=1 \Rightarrow t=3$$

$$x=3 \Rightarrow t=1$$

1 punct

Notând $I = \int_1^3 \frac{1}{1+2^{4x-8}} dx = \int_3^1 \frac{1}{1+2^{4(4-t)-8}} (-dt) =$

$$= \int_1^3 \frac{1}{1+2^{-4t+8}} dt = \int_1^3 \frac{1}{1+\frac{1}{2^{4t-8}}} dt = \int_1^3 \frac{2^{4t-8}}{2^{4t-8}+1} dt$$
 2 puncte

$$I + I = \int_1^3 \frac{1}{1+2^{4x-8}} dx + \int_1^3 \frac{2^{4x-8}}{1+2^{4x-8}} dx = \int_1^3 dx = x \Big|_1^3 = 2$$
 2 puncte

în sfârșit $I = 1$

1 punct.

PROBLEMA NR

ENUNȚ:

Se consideră grupul $(H, \star)$ unde $H \subset (0, \infty)$ este o mulțime care verifică condițiile:

i) $x \in H \Rightarrow \frac{1}{x} \in H$ și

ii) $2023 \in H$

Știind că $x \star y = \frac{1}{x} \star \frac{1}{y}$ pentru orice $x, y \in H$, arată că:

a) H nu e interval

b) $(x \star x) \star (x \star \frac{1}{x}) = 1$ pentru orice $x \in H$

c) există un grup care verifică toate proprietățile din enunț.

prob. 28331, GM 11/2023, Răzvan și Ioan Ghita, Bleg

SOLUȚIE:

a) Dacă $1 \in H$ atunci $x \star 1 = \frac{1}{x} \star 1$ și prin simplificare la dreapta cu 1 obținem

$x = \frac{1}{x}$. Atunci $x^2 = 1$ adică $x = 1$ pentru orice $x \in H$ pentru orice $x \in H$

adică $H = \{1\}$, în contradicție cu faptul că $2023 \in H$ 2 puncte

b) Fie $\theta \in H$ elementul neutru din grupul $(H, \star)$. Atunci $\frac{1}{\theta} \in H$.

Făcând $y = \frac{1}{\theta}$ în ipoteză, obținem $x \star \frac{1}{\theta} = \frac{1}{x}$, $\forall x \in H$ și avem

$$\frac{1}{x \star x} = (x \star x) \star \frac{1}{\theta} = x \star (x \star \frac{1}{\theta}) = x \star \frac{1}{x} \text{ și deci } (x \star x) \star (x \star \frac{1}{x}) = 1$$

pentru orice $x \in H$

3 puncte

c) Fie $H = (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $x \star y = x^{\frac{1}{y}}$ lyy Atunci $(H, \star)$ este un grup

care verifică toate proprietățile din enunț

2 puncte

INEGALITATE INTEGRALĂ CLASA XII

DAN DUMITRESCU

1. Fie $f : [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât

$$f(x) \geq 1, \quad \forall x \in [0, 1],$$

și

$$f(x) \geq -\ln x, \quad \forall x \in [1, e].$$

Arătați că

$$\int_0^1 \log_5(f(x)) dx + \int_1^e e^{f(x)} dx > 1.$$

Soluție :

Notăm

$$I(f) = \int_0^1 \log_5(f(x)) dx + \int_1^e e^{f(x)} dx.$$

Pentru $x \in [0, 1]$ avem $f(x) \geq 1$, deci

$$\log_5(f(x)) \geq 0.$$

Pentru $x \in [1, e]$ avem $f(x) \geq -\ln x$, deci

$$e^{f(x)} \geq e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Prin urmare,

$$I(f) \geq \int_0^1 0 dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

Arătăm că egalitatea nu se poate atinge. Dacă am avea $I(f) = 1$, atunci ar trebui ca simultan

$$\int_0^1 \log_5(f(x)) dx = 0$$

și

$$\int_1^e \left(e^{f(x)} - \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

Integrandele sunt continue și nenegative, deci ele trebuie să fie identic nule. Astfel,

$$\log_5(f(x)) = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

de unde

$$f(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

În particular,

$$f(1) = 1.$$

Pe de altă parte,

$$e^{f(x)} = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, e],$$

deci

$$f(x) = -\ln x, \quad \forall x \in [1, e].$$

În particular,

$$f(1) = 0.$$

Contradicție. Așadar,

$$I(f) > 1.$$

1 punct

1 punct