

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2013

Clasa a V-a

Problema 1

Se consider numărul:

$$A = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^4 + \dots + x \cdot 2^{199}$$

a) Arătați că x are ultima cifră 7.

b) Determinați numărul A și arătați că A se împarte exact la 10.

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 2

Determinați toate numerele \overline{abcba} divizibile cu 55.

Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

Bunicul are 7 nepoți: Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil, Florin și Gabriel. Vârsta bunicului este de 74 de ani și este egală cu suma vârstelor nepoților săi. Vârstele lui Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil, Florin sunt numere pare consecutive, iar Gabriel are un frate geamăn. Câți ani are Gabriel și cum se numește fratele său geamăn.

Gazeta Matematică 10/2022

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a VI-a

Problema 1

Fie triunghiul ABC cu $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 16 \text{ cm}$, $AC = 14 \text{ cm}$, $D \in [AC]$.
Determinați raportul $\frac{AD}{DC}$ știind că perimetrul triunghiului ABD este egal cu perimetrul triunghiului BDC .

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 2

O cursă athletică a început după ora 5 și s-a terminat înainte de ora 6. Atât la start cât și la finish unghiul dintre minutar și orar era de 66° . Câte minute a durat cursa?

Neculai Stanciu, Buzău

Problema 3

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Aflați numerele a, b, c , astfel încât $2^a + 2^{b+1} + 2^{c+2} = 56$.

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat și Ovidiu Țățan, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XVIII-a
6 aprilie 2023
Clasa a VII-a

Problema 1

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{c}, \text{ notațiile fiind cele cunoscute.}$$

Ovidiu Țățan, Rm. Sărat

Problema 2

Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P pe prelungirile laturilor AB, AC, BC astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA} = \frac{BP}{BC} = k$. Notăm cu S_{ABC} aria triunghiului ABC .

a) Dacă $k = \frac{1}{3}$ și $S_{ABC} = 2022 \text{ cm}^2$ aflați S_{APB}

b) Determinați S_{MNP} în funcție de S_{ABC} .

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 3

Determinați $a, b \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a^2 + b^2 - ab - 2(a + b) = 0$.

Neculai Stanciu, Buzău

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a VIII-a

Problema 1

Arătați că numărul

$N = (5^{22}\sqrt{2} + 3^{42}\sqrt{5})^2 - (5^{22} + 3^{42})^2 - 2 \cdot 5^{22} \cdot 3^{42} \cdot (\sqrt{10} - 1)$ este natural și analizați dacă N este prim sau compus.

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

O piramidă patrulateră regulată are muchia bazei $AB = 8\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 16$ cm. Punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AB, BC , respectiv VA .

- Demonstrați că dreapta VN este paralelă cu planul (MOP) .
- Calculați valoarea tangentei unghiului diedru determinat de planurile (VMC) și (ABC)

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 3

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că avem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a IX-a

Problema 1

Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\left[\sqrt{2n+1} \right] + \left[\frac{n+2}{3} \right] = n+1$$

Ovidiu Țâțan, Rm. Sărat

Problema 2

Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2}{m_a^2} + \frac{b^2}{m_b^2} + \frac{c^2}{m_c^2} \geq 3, \text{ notațiile fiind cele cunoscute.}$$

Ovidiu Țâțan, Rm. Sărat

Problema 3

Se consideră triunghiul echilateral ABC de latură a . Fie $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ astfel încât $\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{2}$, $AA' \cap BB' = \{F\}$, $CC' \cap BB' = \{G\}$, $AA' \cap CC' = \{E\}$.

- Arătați că triunghiul EFG este echilateral.
- Determinați lungimea laturii triunghiului EFG

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a X-a

Problema 1

- a) Să se rezolve în mulțimea $N^* \times N^*$ ecuația $3^x + 1 = 4y$.
b) Să se arate că ecuația $3^x + 1 = 4x$ are cel mult două soluții reale.

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Să se arate că $\sin \frac{\pi}{10} \geq \frac{1}{9}$.

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 3

Determinați funcțiile $f: R \rightarrow R$ care verifică $f(x)f(y) = xy - f(x + y)$,
pentru orice $x, y \in R$.

Supliment Gazeta Matematică 2/2023

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a XI-a

Problema 1

Să se calculeze limita:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2^3 + x^3} + \sqrt[3]{2^5 + x^5} - 2\sqrt[4]{2^7 + x^7}}{\sqrt{x^3 - 2^2} + \sqrt[3]{x^4 - 2^3} - 2\sqrt[4]{x^5 - 2^4}}$$

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 2

Fie $A, B \in M_2(R)$, astfel încât $AB = BA$.

- i) Să se arate că $\det(A + xB) = \det A + \alpha x + x^2 \det B$ unde $\alpha \in R$ iar x este un număr complex oarecare;
- ii) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$;
- iii) Dacă $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$ atunci $\det A = \det B$.

Costică Ambrinoc Rm. Sărat

Problema 3

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit astfel: $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{na_n}{n+a_n^2}$, pentru orice $n \geq 1$. Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Supliment Gazeta Matematică 10/2022

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XVIII-a

6 aprilie 2023

Clasa a XII-a

Problema 1

Pentru $m \in \mathbb{C}^*$ se definește legea de compoziție:

$$z_1 * z_2 = mz_1z_2 + im(z_1 + z_2) - m - i, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*.$$

Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{C}^*$ pentru care legea ”* ” are element neutru și simetricul lui $2 - i$ este $1 - i$.

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 2

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 9x + 4}{(x^2 + x + 1)^{2023}}$.

Să se calculeze: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 4

Fie $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Determinați funcția f știind că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) \leq \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$$

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.